RESUMEN DE TEORIA

Primera Parte: Series y Sucesiones

SUCESIONES

Definición: La sucesión $\{a_n\}$ converge a L y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si para cada número positivo ε hay un número positivo correspondiente N tal que $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Si no hay un número finito L al que converja una sucesión, se dice que esta diverge o que es divergente.

SE CUMPLE LAS MISMAS PROPIEDADES DE LOS LIMITES EN MATEMATICAS 1. REVISARLAS.

Teorema: "Teorema del emparedado" Supóngase que $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ converjan a L y que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq K$. Entonces $\{b_n\}$ también converge a L.

Teorema: Si $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Teorema: Si U es una cota superior para una sucesión no decreciente $\{a_n\}$, entonces la sucesión converge a un límite A que es menor o igual a U. De manera análoga, si L es una cota inferior para una sucesión no creciente $\{b_n\}$ entonces la sucesión $\{b_n\}$ converge a un límite que es menor o igual a L.

SERIES

Definición. La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y tiene suma S si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S. Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie diverge. Una serie divergente no tiene suma.

Teorema: "Criterio del n-ésimo termino para la divergencia"

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En forma equivalente, si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o si no existe el límite entonces la serie diverge.

Teorema: Linealidad de las series convergentes.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen y "c" es una constante, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ también converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ diverge y $c \neq 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ diverge.

Teorema: "Agrupación de términos en una serie infinita"

Los términos de una serie convergente se pueden agrupar de cualquier manera (siempre que el orden de los términos se mantenga) y la nueva serie convergerá a la misma suma que la serie original.

SERIES POSITIVAS

Teorema: "Criterio de la integral"

Sea f una función CONTINUA, POSITIVA, NO CRECIENTE definida en el intervalo $[1, \infty)$ y suponga que $a_n = f(n)$ para todo entero positivo "n". Entonces la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Converge si y solo si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} a_n dn$$

Converge.

<u>NOTA:</u> Para el uso de este criterio se debe PODER integrar fácilmente la serie, de lo contrario no es viable. Por otro lado es MUY IMPORTANTE "DEMOSTRAR" las hipótesis (continua, positiva, decreciente) para luego aplicar la integral, sino lo demuestra estaría mala la respuesta"

Teorema: "Criterio de comparación ordinaria"

Suponga que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$.

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, también $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Teorema "Criterio de comparación del límite"

Suponga que $a_n \geq 0, b_n > 0$ y que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Entonces $0 < L < \infty$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se comportan iguales. Mientras que si $L = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Por otro lado si $L = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

<u>NOTA:</u> Se puede utilizar este criterio a su voluntad, ya que b_n es la que usted quiera emplear, la recomendación seria SELECCIONAR UNA B_N tal que el limite existe, recuerde los limites NOTABLES y los LIMITES AL INFINITO de matemáticas 1. "Suerte"

Teorema: "Criterio del cociente"

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y supóngase que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(a) Si $L < 1$ la serie converge
(b) Si $L > 1$ la serie diverge.
(c) Si $L = 1$ No es concluyente.

NOTA: Este criterio representa una poderosa herramienta cuando en la serie aparece términos tales como $n!$; r^n ; n^n (factoriales, potencias y potencia de potencia). Ya que al aplicar el criterio se cancelan estas operaciones las cuales desconocemos su comportamiento al infinito.

Teorema: "Criterio de la raíz n-ésima"

Sea $a_n > 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

(a) Si $r < 1$ la serie converge.
(b) Si $r > 1$ la serie diverge
(c) Si $r = 1$ No es concluyente.

NOTA: La única forma de emplear este criterio es que la serie sea TOTALMENTE elevado a la n-ésima potencia. De lo contrario ni se le ocurra emplear este teorema. "Never"

SERIES ALTERNANTES

Teorema: "Criterio de las series alternantes"

Sea una serie alternante con $a_n > a_{n+1} > 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie converge. Además, el error cometido al usar la suma S de los primeros términos para la suma S de la serie no es mayor que a_{n+1}.

Teorema: "Criterio de convergencia absoluta"

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Una serie "converge absolutamente" si se cumple este teorema

NOTA: Esta es la UNICA forma que Uds. tiene para decir que una serie alternante es convergente absolutamente. NO HAY MAS.

Teorema: "Criterio del cociente absoluto"

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no nulos y suponga que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

(a) Si $L < 1$ la serie converge.
(b) Si $L > 1$ la serie diverge
(c) Si $L = 1$ no es concluyente.

Teorema: "Teorema de reordenamiento"

Los términos de una serie absolutamente convergente pueden reordenarse sin afectar la convergencia o la suma de la serie.

NOTA: Se dice que la serie alternante CONVERGE CONDICIONALMENTE si por criterio absoluto diverge pero por cumplir el teorema de serie alternante converge. Se dice que la serie alternante DIVERGE si ambos criterios divergen.

Teorema: El conjunto de convergencia de una serie de potencias $\sum a_n x^n$ es siempre un intervalo de uno de los siguientes tres tipos.

(a) El único punto $x = 0$
(b) Un intervalo $(-R, R)$, incluyendo posiblemente a uno o ambos extremos.
(c) Toda recta real

En (a) (b) (c) se dice que la serie tiene radio de convergencia 0, R e ∞ respectivamente.

Teorema: Una serie de potencia $\sum a_n x^n$ converge absolutamente en el interior de su intervalo de convergencia.

Teorema: Suponga que S es la suma de una serie de potencias en un intervalo I, entonces, si x es interior de I.

(a) $S'(x) = \sum D_x(a_n x^n)$
(b) $\int_0^x S(t)dt = \sum \int_0^x a_n t^n dt$

Teorema: Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$, donde ambas series convergen al menos para $|x| < r$. Si se realiza las operaciones de suma, resta y multiplicación en estas series como si fueran polinomio entonces la serie resultante convergerán para $|x| < r$.

Teorema: "Teorema de Taylor" Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo $(a-r, a+r)$. La serie de Taylor

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

Representa a la función f en el intervalo $(a-r, a+r)$ y solo si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

Donde $R_n(x)$ es el residuo en la forma de Taylor

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Y c es algún punto en el interior del intervalo.

Nota: Si $a=0$ entonces se hace presencia de la serie de MacLaurin

NOTA: La representación en sumatoria de la serie de Taylor es

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Segunda Parte: Ecuaciones Diferenciales (1er parte)

Las **ECUACIONES LINEALES** se resuelven de la siguiente forma:

Primero ordene de la ecuación hasta obtener la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=G(x)$$

Luego determine el factor integrante mediante la relación

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$$

Existen varias forma después de esto la más sencilla es resolver la siguiente igualdad

$$(1) \qquad \mu(x).y=\int \mu(x).g(x)dx+C$$

La otra más larga pero sin embargo la misa ideología es multiplicar la ecuación diferencial por el factor integrante y tenemos

$$(2) \quad \mu(x)\left(\frac{dy}{dx}+P(x)y\right)=\mu(x)G(x) \;\; => \;\; \mu(x)\frac{dy}{dx}+P(x)\mu(x)y=\mu(x)G(x)$$

Note que se tiene que

$$(\mu(x)y)' = \mu'(x)y + \mu(x)\frac{dy}{dx} \ \ ; \ \ donde \ \ \mu'(x) = e^{\int P(x)dx}P(x)$$

Luego se tiene

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)G(x) \ \ => \quad \mu(x)y = \int \mu(x)G(x)dx + C$$

Lo que da la misma igualdad al principio

La **<u>ECUACION DE BERNOULLI</u>** establece la siguiente condición sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = G(x)y^n$$

Se realiza un cambio de variable conveniente y este es

$$w = y^{1-n}$$

Derivando el cambio de variable:

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \ \ => \quad \frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Luego procedemos a divir la ecuación diferencial original entre el termino y^n queda que:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = G(x) \ \ => \ \frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} + P(x)w = G(x)$$

Multiplicando por $(1-n)$, de manera que queda la ecuación de la forma

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)G(x)$$

Ecuación diferencia lineal, la cual ya se estudió como obtener las soluciones

Las **<u>ecuaciones diferenciales de VARIABLES SEPARABLES</u>**, son sencillas de resolver, separe en una parte de la igualdad los términos de una variable y en el otro lado los otros términos de la otra variable.

OJO siempre se puede hacer ya que son VARIABLES SEPARABLES. Del resto solo falta integrar

Las **<u>ecuaciones HOMOGONEAS</u>** cumple con la condición de

$$F(kx, ky) = F(x, y)$$

Debe ser verificada esta condición para luego aplicar el razonamiento siguiente. Se realiza un cambio de variable para ello existe dos sugerencias

$$\begin{cases} (1) \quad u = \dfrac{y}{x} \\ (2) \quad w = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

Y dependiendo del diferencial en la ecuación se debe cambiar el mismo mediante el cambio de variable. Dado a que la mayoría de los ejercicios el diferencial es $\frac{dy}{dx}$ obtenemos el cambio de este mediante las sugerencias

Para (1)

$$y = xu \;\; => \;\; \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Para (2)

$$x = yw => \;\; 1 = \frac{dy}{dx}w + y\frac{dw}{dx} \;\; => \;\; \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y\frac{dw}{dx}}{w}$$

Pero en el cambio quedan tres variables (x) (y) (w) debemos cambiar (y) entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{x}{w}\frac{dw}{dx}}{w}$$

<u>NOTA:</u> Este es el cambio más difícil en cierta forma. Cual cambio de variable utilizar, queda por parte de la ecuación diferencial si Uds. observa que hay la relación $\frac{y}{x}$ utilice el primero como también el cambio de diferencial pero si observa la relación $\frac{x}{y}$ utilice el segundo con la “desventaja” del cambio de diferencial.

Las ecuaciones diferenciales conocidas como **COCIENTES LINEALES o NO HOMOGENEA**. Se analizan del siguiente método

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Caso N°1 $c_1 = c_2 = 0$ **HOMOGENEA.**

Caso N°2 $c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$, **NO HOMOGENEA.**

Caso N°2.1 SI $a_1b_2 = b_1a_2$, Luego realizo el cambio de variable

$$z = x + y$$

Caso N°2.2 Si $a_1b_2 \neq a_2b_2$, realizo lo siguiente.

Busco la solución al problema

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Una vez hallado los valores de $\alpha\ y\ \beta$. Se realiza el cambio de variable

$$u = x + \alpha \quad ; \quad w = y + \beta$$

Luego de aplicar el cambio de variable la ecuación se reduce a una homogénea.

REDUCCIONES DE ÓRDENES.

Caso (1): $f(x) = f(x, y, y')$ DEPENDE DE SOLO VARIABLE INDEPENDIENTE.

$$\frac{d^2y}{dx} = f(x) \rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = f(x) \quad e\ integramos\ dos\ veces.$$

Caso (2): $f(x, y') = f(x, y, y')$ DEPENDE DE DERIVADA DE "y" Y VARIABLE INDEPENDIENTE.

CAMBIO DE VARIBLE:

$$u = \frac{dy}{dx} = y' \qquad y\ ademas \quad \frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Caso (3): $f(y, y') = f(x, y, y')$ NO DEPENDE DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE.

CAMBIO DE VARIBLE:

$$u = \frac{dy}{dx} = y' \qquad y \quad ademas \quad \frac{du}{dy}u = \frac{d^2y}{dx^2}$$